

# Logique numérique

Certaines questions, qui reviennent régulièrement dans les concours, sont à mi-chemin entre l'épreuve de mathématiques et celle de logique. Il s'agit de questions avec des chiffres, et basées sur les quatre opérations de base, mais dont la difficulté réside surtout dans la recherche d'une démarche logique cachée. Le raisonnement s'apparente plus à celui des tests de dominos ou de cartes à jouer que des questions de maths.

## I Les schémas à compléter

### *Les carrés*

Un des schémas les plus courants est celui d'une grille contenant des nombres dans chaque case. Ceux-ci, disposés selon une logique à découvrir, ont une ou deux cases vides que l'on doit compléter en suivant la même logique. Les opérations numériques sont toujours simples : la plupart du temps des additions et des soustractions, parfois des multiplications, des divisions ou des moyennes, très rarement des puissances ou autres fonctions mathématiques complexes. La difficulté est ailleurs. Pour trouver la logique du schéma, il faut chercher parmi de nombreux paramètres et découvrir, par exemple, si le raisonnement se fait horizontalement, verticalement, ou les deux à la fois; trouver quels nombres doivent être additionnés, soustraits ou multipliés, et ainsi de suite.

Voici trois exemples typiques où il faut compléter à chaque fois les deux cases vides.

#### Exemple 1

4	8	3	9
6	2	4	4
3	6	2	
7	4	5	

### Exemple 2

9	8	2	7
4	6	5	3
5	2	7	
6	4	2	

### Exemple 3

2	4	8	14
6	10	16	22
12	18	24	
20	26	30	

Face à ces carrés, tout d'abord, on cherche rapidement pour voir s'il n'y a pas une solution évidente qui saute aux yeux.

Si rien ne s'impose, alors il faut procéder à des d'essais systématiques :

- **On additionne les nombres**, par deux, par trois, par quatre, par rangée, par colonne, et chaque fois on se pose des questions du style : « Obtiens-tu toujours le même résultat ? », « Cette somme est-elle présente dans un autre carré ? », « La somme de ces carrés a-t-elle un rapport avec la somme d'autres carrés ? » (identique, moitié, le double, etc.).
- **Si on ne trouve rien, on passe aux soustractions**, en combinant les soustractions avec les additions (la première case, moins la seconde, plus la troisième... les trois premières moins la dernière, etc.).
- **Si on reste toujours sans solution, il faut envisager les multiplications et les divisions**, surtout quand les nombres ont de grands écarts entre eux.

Quand on a trouvé une corrélation entre des nombres, il faut vérifier qu'elle s'applique de la même façon dans tout le carré.

**On doit pouvoir énoncer une règle simple qui s'applique sans exception à toute la grille.**

Ensuite, il suffit d'appliquer cette règle pour trouver le ou les chiffres qui manquent.

### Exemple 1

On aura testé diverses additions et avec un peu de chance, on aura trouvé que la somme des deux premières cases est égale à la somme des deux dernières, aussi bien par rangée que par colonne. Règle valable qui s'applique à tout le carré. Si on n'a pas cherché dans cette direction, on essaiera avec des soustractions et on trouvera que les deux premières cases, moins la troisième donnent la quatrième... Autre règle parfaitement valable qui s'applique à toute la grille.

4	+	8	-	3	=	9
+	+	+	+	+	+	+
6	+	2	-	4	=	4
-	-	-	-	-	-	-
3	+	6	-	2	=	7
-	-	-	-	-	-	-
7	+	4	-	5	=	6

Les rapports numériques peuvent s'énoncer de façons diverses : ce qui compte, c'est de trouver une règle simple qui s'applique à tout le carré.

### Exemple 2

On cherche de la même manière, mais il faut savoir être flexible, car ici, le résultat des opérations ne s'inscrit pas dans le carré. Avec cette grille, il faut obtenir un total identique pour toutes les lignes et toutes les colonnes : en l'occurrence en additionnant les trois premiers nombres et en soustrayant le quatrième, ce qui donne toujours 12.

9	+	8	+	2	-	7	=12
+	+	+	+	+	+	+	
4	+	6	+	5	-	3	=12
+	+	+	+	+	+	+	
5	+	2	+	7	-	2	=12
+	+	+	+	+	+	+	
6	+	4	+	2	-	0	=12
+	+	+	+	+	+	+	
							=12 =12 =12 =12

### Exemple 3

Fort de ces premiers succès, on se précipite sur l'exemple suivant et on cherche des combinaisons d'additions et de soustractions, et inévitablement, on trouve ici ou là des démarches prometteuses, mais sans suite. Puis, la solution nous saute aux yeux : le carré est tout simplement rempli des nombres pairs en ordre croissant, mais disposés en diagonale.

2	4	8	14
6	10	16	22
12	18	24	28
20	26	30	32



Tirons quelques leçons de cette mésaventure :

- Le coup d'œil préliminaire, sans à priori, peut permettre d'économiser beaucoup de temps.
- Si une question résiste, il faut savoir passer à la suivante.
- Pour les matheux : vous avez tendance à chercher (et à trouver) des combinaisons (trop) complexes. Apprenez à être simple !

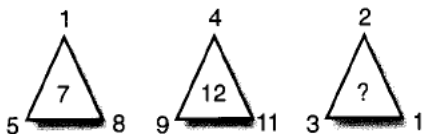
### Les triangles

Après la grille de carrés, le triangle est la forme la plus courante. Les grands principes sont les mêmes, mais alors que dans les carrés la règle doit s'appliquer à des rangées ou des colonnes différentes, ici elle doit s'appliquer à chaque triangle.

### Exemple 4

Par quel nombre faut-il remplacer le point d'interrogation ?

Comme avec les carrés, on additionne, soustrait, etc. mais en tenant compte de la disposition dans le schéma. Ici, par exemple, il est légitime de penser que le nombre au milieu a un rôle un peu différent des autres : le total, la moitié, la différence, etc. Après avoir

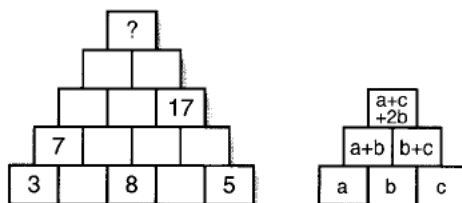


trouvé, pour les nombres à l'extérieur du triangle, un total de 14 pour le premier et de 24 pour le second, on voit que le nombre du centre représente la moitié de la somme des nombres autour. Donc 3 pour le dernier triangle.

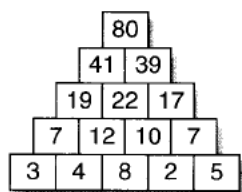
### Les pyramides

Les pyramides (que l'on retrouve surtout dans les concours d'orthophoniste) sont une autre disposition classique, avec habituellement toujours la même règle : chaque case a la même valeur que la somme des deux cases juste au-dessous. Ici, il ne s'agit donc pas de déduction logique, mais tout simplement d'additions et de soustractions. La disposition du 17 par rapport au 8 et au 5 de la base peut poser problème. Le petit schéma à côté explique comment résoudre les cas de ce genre.

#### Exemple 5



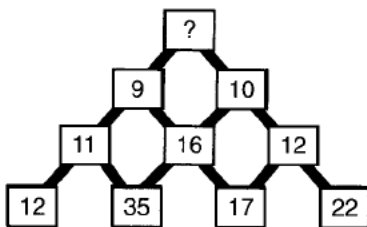
Et c'est ainsi que d'étape en étape, on parvient à remplir entièrement le schéma :



### Autres présentations

- Variante de cette pyramide, la présentation en arborescence. Ici, cependant, il y a des logiques à trouver et souvent, elles vont à l'encontre de l'esprit mathématique. Dans l'exemple 6, il faut considérer les chiffres plutôt que les nombres...

#### Exemple 6



En effet, alors que l'on veut instinctivement faire la somme, la différence, voire la moyenne, de chaque paire de nombres pour trouver celui juste au-dessus, ici il faut paradoxalement additionner les chiffres :  $1 + 2 + 3 + 5 = 11$ .

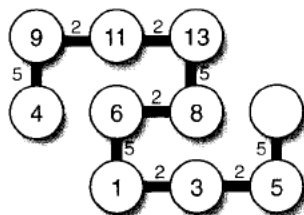
La solution est donc  $9 + 1 + 0$ , soit 10.

- Le schéma peut être à la base même de la logique arithmétique. Dans l'exemple 7, où l'on doit trouver le nombre qui s'inscrit dans le dernier rond, on trouvera aisément la logique des nombres en calculant (ou notant) les différences entre les nombres le long du chemin :

#### Exemple 7

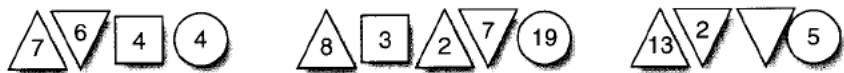
On voit qu'horizontalement il y a des différences de 2 et verticalement de 5. Plus précisément, si on monte + 5, si on descend - 5, si on va à droite + 2, à gauche - 2.

La solution est donc  $5 + 5 = 10$ .



- Dans le même ordre d'idée, on retrouve régulièrement des questions de logique numérique, où ce sont les formes qui gouvernent l'opération qui doit être effectuée.

#### Exemple 8



Dans cet exemple, il faut trouver la fonction de chaque forme. Après divers tâtonnements, on trouvera donc que le triangle avec la pointe en haut doit être additionné, celui avec la pointe en bas soustrait, le carré multiplie et le rond donne le résultat.

Une convention veut que les calculs se fassent dans le sens de la lecture sans tenir compte des priorités des opérations. Avec notre exemple, ceci donne  $13 - 2 - ? = 5$ , donc  $? = 6$ .

## Les opérations codées

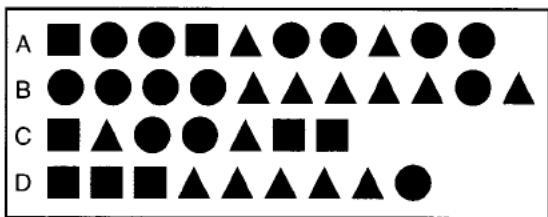
Autre grande catégorie de logique numérique : les questions où il faut déduire logiquement la valeur d'un symbole ou d'un groupe de symboles.

### *Les symboles à valeur relative*

#### Exemple 9

Dans cet exemple, typique de toute une catégorie de questions, il faut établir quel ensemble a la plus grande valeur, si...

$$\blacksquare = \bullet \bullet \quad \text{et} \quad \bullet = \blacktriangle \blacktriangle$$



Le problème n'est pas bien difficile, et il suffit d'établir les valeurs relatives des différentes formes. Le triangle ayant la valeur la plus basse, on lui donne la valeur de 1, alors le cercle vaut 2 et le carré vaut 4. Ensuite, il suffit de faire l'addition. C'est A qui a la plus grande valeur.

A	4	2	2	4	1	2	2	1	2	2	= 22
B	2	2	2	2	1	1	1	1	2	1	= 16
C	4	1	2	2	1	4	4				= 18
D	4	4	4	1	1	1	1	1	2		= 19

### *Les symboles qui remplacent des nombres*

Les forts en maths ont tendance à vouloir résoudre ces problèmes par l'algèbre, ce qui est généralement possible, mais prend souvent beaucoup plus de temps qu'en appliquant une démarche qui repose plus sur l'observation intelligente que l'algèbre proprement dite.

#### Exemple 10

Calculez la valeur de chacun des trois signes :

$\bullet$	+	$\blacktriangle$	+	$\blacksquare$	=	43				
$\bullet$	+	$\bullet$	+	$\blacktriangle$	=	61				
$\blacksquare$	+	$\blacksquare$	+	$\blacktriangle$	+	$\blacktriangle$	+	$\blacktriangle$	=	47
$\blacksquare$	=			$\blacktriangle$	=			$\bullet$	=	

On peut transcrire,  $A + B + C = 43$ , etc. Mais juste avec les yeux et un peu d'entraînement, on trouve le moyen d'isoler un symbole pour en trouver sa valeur. On voit, par exemple que si on combine les deux dernières égalités

et qu'on leur retranche, deux fois de suite la première, il ne restera que des triangles : rangée à  $61 +$  rangée à  $47 = 2$  ronds, 2 carrés et 4 triangles. On retranche la rangée à 43, (un rond, un triangle et un carré) deux fois de suite, il ne reste que 2 triangles. Donc  $61 + 47 - 43 - 43 = 22$ , et donc un triangle = 11. Ensuite, il suffit de faire de simples substitutions pour trouver que le rond vaut 25 et le carré 7.



Notez que les conventions pour les questions de ce style ne sont pas fermement établies. Vous remarquerez que dans l'exemple 9, les signes étaient à additionner mais n'étaient pas pour autant séparés de signe +, alors que dans l'exemple 10, il y a bien des signes +. Ce n'est pas toujours le cas, surtout quand les symboles sont remplacés par des dessins d'objets réels (fruits, fleurs, etc.).

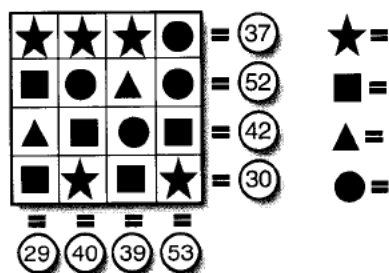
D'autres dispositions, ou des instructions plus précises évitent ces ambiguïtés.

### Exemple 11

Trouvez la valeur de chaque signe, sachant que le nombre au bout de chaque rangée et de chaque colonne représente la valeur totale des signes qui y figurent.

Ici aussi, on peut procéder par algèbre, mais un coup d'œil exercé obtiendra des résultats plus rapides. On remarquera, par exemple, que la dernière rangée contient deux carrés et deux étoiles, et donc un carré plus une étoile vaut 15. Cette paire se retrouve dans la dernière colonne, on peut donc la retrancher et trouver la valeur des ronds...

Solution : étoile 6, carré 9, triangle 5, rond 19.



### Les symboles qui remplacent des chiffres :

Avec ces questions, nous avons une simple démarche de codage. Chaque chiffre est toujours remplacé par un même symbole et ces symboles ont les mêmes fonctions que les chiffres conventionnels. Ainsi un rond à côté d'un carré ne signifie pas rond plus carré, mais représente un nombre à deux chiffres où le rond est le chiffre des dizaines et le carré le chiffre des unités. Normalement, ceci devrait être précisé dans les instructions, mais la forme de la question de toute façon le laisse deviner.

### Exemple 12

Le carré, le rond, le triangle et l'étoile remplacent toujours les mêmes chiffres. Si l'étoile remplace le 6, quel chiffre est remplacé par le triangle ?

$$\begin{array}{l} \bullet \blacksquare + \bullet \blacksquare + \bullet \blacksquare + \bullet \star = \star \blacksquare \\ \bullet \blacktriangle \blacksquare + \blacktriangle \blacksquare + \blacksquare \blacktriangle + \bullet \blacksquare \star = \blacktriangle \blacktriangle \blacktriangle \\ \blacktriangle = \end{array}$$

Une démarche par tâtonnement successif est généralement la stratégie la plus rapide. On prend la première ligne, et on se penche d'abord sur les unités. On voit que trois carrés plus 6 (l'étoile) donne un carré. On cherche rapidement les diverses possibilités :

- le carré peut-il être 0 ?  $3 \times 0 + 6$ , non ;
- peut-il être 1 ?  $3 \times 1 + 6$ , non ! et ainsi de suite.

Dès que le chiffre d'une forme est établi, on l'inscrit au-dessus de cette forme chaque fois qu'elle apparaît et on procède de la même façon avec la forme suivante. Après divers essais on trouvera : ( $17 + 17 + 17 + 16 = 67$  ;  $147 + 47 + 74 + 176 = 444$ ).

### L'essentiel à retenir

#### Les schémas

Pour compléter le schéma, il faut trouver la règle qui le gouverne :

- Chercher la règle la plus générale et la plus simple.
- S'assurer qu'elle s'applique bien à tous les éléments de la question (Au moins toutes les rangées ou toutes les colonnes avec une grille, tous les exemples avec les triangles et formes analogues).

Pour trouver cette règle :

- Tout d'abord suivre son instinct qui détecte bien des signes avant de les analyser :
  - les grands écarts de valeurs (multiplication et division souvent impliquées) ;
  - les valeurs qui sont le double, la moitié, voir le tiers d'une autre ;
  - les multiples de trois, de cinq, de dix qui sautent aux yeux ;
  - les similitudes ou au contraire les grandes différences des nombres.
- Ensuite procéder méthodiquement :
  - chercher les combinaisons de chiffres simples, additions, soustractions, doubles, moitiés... ;





- chercher les combinaisons dans des directions diverses, par colonne, par rangée, en diagonale. Avec les triangles, la base, le sommet, les côtés...;
- considérer la possibilité d'une règle qui se rapproche de celles des séries numériques (voir ce chapitre);
- ne pas oublier les démarches peu mathématiques : addition ou déplacement de chiffres plutôt que de nombres.

### **Les opérations codées**

- Pour les valeurs relatives :
  - chercher l'élément avec la valeur la plus basse et retranscrire les autres dans cette valeur.
- Pour les symboles qui remplacent des nombres, chercher à isoler un symbole pour trouver sa valeur :
  - en trouvant des sous-groupes dont on peut déterminer la valeur;
  - en remplaçant un ou plusieurs symboles par d'autres de valeur connue;
  - en combinant des groupes et en retranchant d'autres.
- Pour les symboles qui remplacent des chiffres :
  - considérer uniquement les unités, pour déblayer le terrain;
  - procéder par tâtonnements successifs.